©2017 Published in 5th International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science 29-30 September 2017 (ISITES2017 Baku - Azerbaijan)

Numerical Solution of the Burgers Equation by Using Iterative DQM

[1]Zekeriya Girgin, *[2]Faruk Emre Aysal and [2]Hüseyin Bayrakçeken
[1]Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Pamukkale University, Turkey
*[2]Faculty of Technology, Department of Automotive Engineering, Afyon Kocatepe University, Turkey

Abstract

In the literature proposed a lot of approximations for numerical solution of Burgers Equation. However, the accuracy of these approximations results not well. In the presented work a new approximation for the numerical solution of Burgers Equation developed by using Iterative Differential Quadrature Method (I-DQM). The results of I-DQM has very high accuracy even for smaller kinematic viscosity values than other approximations, for instance υ =0.0001.

Keywords: Burgers Equation, Differential Quadrature Method, Numerical Solution, Kinematic Viscosity

İteratif DQM Kullanılarak Burgers Denkleminin Sayısal Çözümü

Özet

Literatürde Burgers Denkleminin sayısal çözümü için birçok yaklaşım önerilmiş olmasına rağmen bu yaklaşımların hassasiyetleri çok iyi değildir. Bu çalışmada Burgers Denkleminin sayısal çözümü için İteratif Diferansiyel Quadrature Metodu (I-DQM) kullanılarak yeni bir yaklaşım geliştirilmiştir. Yapılan çalışması neticesinde elde sonuçlar I-DQM ile gerçekleştirilen sayısal çözümlerin υ =0.0001 gibi küçük kinematik viskozite değerlerinde bile oldukça yüksek bir hassasiyete sahip olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Burgres Denklemi, Diferansiyel Quadrature Metodu, Sayısal Çözüm, Kinematik Viskozite

1. Introduction

Burgers Denklemi (BD), kararlı durum çözümü ilk defa 1915 yılında Bateman tarafından yapılmış zamana bağlı tek boyutlu homojen sanki-lineer parabolik bir kısmi diferansiyel denklemdir [1]. J. M. Burgers tarafından 1948 yılında türbülanslı akışın matematiksel modellemesinde kullanılan BD Denklem 1'de verilen eşitlik ile Denklem 2 ve 3 te verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak tanımlanmaktadır. Burada, "υ" matematiksel modeli ele alınacak olan akışkanın kinematik viskozitesini ifade etmektedir. BD'nin yapısına bakıldığında nonlineer taşınım teriminin ve kinemetik viskoziteden kaynaklanan difüzyon terimimim bulunduğu görülmektedir. Bu terimler göz önüne alındığında BD aynı zamanda Navier-Stoke's denklemlerinin sadeleştirilmiş bir formu olarak değerlendirilmektedir [2,3].

*Corresponding author: Address: Faculty of Technology, Department of Automotive Engineering Afyon Kocatepe University, Afyonkarahisar /TURKEY. e-mail address: faysal@aku.edu.tr.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \upsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (x,t) \in \Omega\, x\, (0,T]\; ;\; \Omega = (0,1)\; ;\; \upsilon > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le 1 \qquad (2)$$

$$u(0,t) = f_1(t),\ u(1,t) = f_2(t), 0 \le t \le T \qquad (3)$$

BD türbülanslı akışın yanı sıra gaz dinamiği, trafik akışları, şok dalgaları teorisi ve sürekli stokastik sürçler gibi çeşitli uygulamalarda matematiksel model olarak kullanılmıştır. Bununla birlikte BD'nin analitik çözümü Hopf-Cole transformasyonu gibi yaklaşımlarla elde edilebilmektedir [4,5]. Bu durum nonlineer sayısal çözüm metotları geliştirmek isteyen araştırmacılara karşılaştırma fırsatı sunması nedeniyle BD üzerine çalışmalarının artmasına neden olmuştur [6-14]. Kutluay vd. 1999 yılında yaptıkları çalışmada BD'yi analitik olarak ve sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak kinematik viskozite değeri υ=0.01'e çözmüştür. 2004 yılında yaptıkları çalışmada Sonlu Elemanlar Metodunu Quadratik B-Spline ile modifiye ederek BD ve BD benzeri denklemlerin çözümlerini υ=0.001'e kadar elde etmiştir. Ancak bu sayısal çözümlerin hassasiyetleri yeterli seviyede değildir [10,11] Mittal ve Jiwari (2012) yaptıkları çalışmada Polinomal Diferansiyel Quadature Metodunu (PDQM) kullanarak BD tipindeki denklemleri çözmeye çalışmıştır. PDQM kullanılarak nonlinner kısmi diferansiyel denklem, nonlineer adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Sonrasında, dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemi çözülmüştür. Elde edilen sonuçların hassasiyetinim literatürdeki diğer sonuçlar daha kötü olduğu ancak PDQM'in nonlineer problemlerde uygulanmasının diğer yöntemlerden daha kolay olduğu görülmüştür [15] . Gupta ve Ray (2014) Boussineq-BD'ni Homotopi Pertübasyon Metodu (HPM) ve Optimum Homotopi Asimptotik Metodu (OHAM) ile karşılaştırmalı olarak çözmüştür. Elde edilen sonuçlar OHAM'ın yüksek dereceli nonlineer akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde HPM'den daha elverişli olduğunu göstermiştir [16]. Nascimento vd. (2014) Fourier Pseudespektral Metodu (FPM) ve Sonlu Hacimler Metodunu (SHM) kullanarak BD'nin sayısal çözümü için karşılaştırmalı bir çalışma yapmıştır. Elde edilen sonuçlar FPM ile elde edilen sonuçların yeterli seviye olduğunu ancak çözümü elde etmenin SHM'ye göre çok daha uzun sürdüğünü göstermiştir. FPM ile Daldırılmış Sınır Metodunu (Immersed Boundary Method, IMD) birleştirrek elde edilen Hibrit Metot kullanılarak yapılan çözümlerde ise nonlineer mühendislik problemlerinin çözümü için yeterli hassasiyette sonuçlar elde edildiği görülmüştür [17]. Jiwari 2012 ve 2015 yılında Uniform Haar Dalgacığı, Sanki-lineerleştirme ve Kapalı Euler Metodunu kullanarak BD'nin çözümü için Hibrit bir yöntem ortaya koymuştur. Analitik çözüm ile karşılaştırıldığında bu yöntemin oldukça yüksek bir hassasiyette kinematik viskozite değeri υ=0.001'e kadar çözüm verebildiği görülmüştür [18,19]. Tamsir vd. 2016 yılında yaptıkları çalışmada Diferansiyel Quadrature Metodu'nun (DQM) ağırlık katsayılarını Genelleştirilmiş DQM'den farklı olarak Üstel Modifye Edilmiş Kübik B-Düzlemi Fonksiyonunu test fonksiyonu olarak kullanarak elde etmiştir. Ortaya koyulan bu yeni DQM ile bir ve iki boyutlu BD'nin çözümleri gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar yeni metodun nonlineer problemlerin çözümü için uygun olduğunu göstermiştir [20].

Bu çalışmada, İteratif DQM (I-DQM) kullanılarak BD için sayısal çözüm gerçekleştirilmiştir.

Literatürdeki diğer sayısal yöntem sonuçları ve Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırıldığında I-DQM oldukça yüksek bir hassasiyeti yakaladığı görülmektedir. I-DQM'in kinematik viskozite değeri υ=0.0001'e kadar kararlı ve uygun sayısal sonuçlar verdiği belirlenmiştir.

2. Calculating of the Weighting Coefficient of DQM and I-DQM

DQM ilk defa 1971 yılında Richard Bellman tarafından başlangıç ve sınır değer problemlerini sayısal olarak çözmek amacıyla ortaya koyulmuştur. DQM'de temel olarak bir fonksiyonun koordinat yönündeki türevi, bu fonksiyonu çepeçevre saran bir uzaydaki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla bulunur. Fonksiyonun türevi yüksek dereceli polinom ile yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve türevin alındığı koordinat yönü boyunca bütün düğüm noktalarındaki bütün fonksiyon değerlerinin lineer toplamı olarak ifade edilebilir [21-23]. Bellman vd. tarafından önerilen ağırlık katsayısı hesaplama yöntemleri klasik DQ yöntemine bazı sınırlamalar getirmektedir. Bu nedenle araştırmacılar Bellman tarafından önerilen ağırlık katsayısı hesaplama yöntemlerine alternatif olabilecek yaklaşımlar geliştirmeye çalışmıştır. Quan ve Chan 1989 yılında yaptıkları çalışmalarda test fonksiyonu olarak Lagrange polinomu kullanarak ağırlık katsayılarını hesaplamıştır. Shu ve Rihcards tarafından 1990 yılında Shu tarafından 1991 yılında yapılan çalışmalar ile DQ metodunun güncel olarak en çok kullanılan ağırlık katsayısı hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Shu ve Richards tarafından geliştirilen bu yöntem ile Bellman vd. tarafından 70'li yıllarda ortaya atılan her iki yöntemden de kaynaklanan hatalar giderilmiştir. Bu yöntem geliştirilirken Bellman vd. ile Quan ve Chan tarafından önerilen yöntemleri içine alan genel bir yaklaşım ortaya koyulmuştur. Bu iki yaklaşımdan yola çıkılarak ağırlık katsayılarını test fonksiyonundan bağımsız olarak hesaplayabilen basit bir cebirsel formül geliştirilmiştir. Bu nedenle bu yönteme Genelleştirilmiş DQM (GDQM) denilmektedir [24-27].

GDQM'e göre ağırlık katsayıları hesabında f (x), $x \in [a,b]$'de tanımlı x'in bir fonksiyonudur. Ayrıca, f (x_i), x_i (i = 1,2, ... N) 'nin farklı değerleri için öngörülen alanda f (x) değerlerini göstermektedir. f (x) 'in r'inci dereceden türevi DQM kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{d^r f(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(r)} f(x_j) \rightarrow i = 1,2,\dots,N \qquad (4)$$

Denklemde $a_{ij}^{(r)}$, x_i'nin her değeri için f(x) fonksiyonunun r'inci dereceden türevinin ağırlık katsayılarını tanımlamaktadır. DQM ağırlık katsayılarının hesaplanmasında test fonksiyonu olarak denklem 5 ve 6'da verilen Lagrange enterpolasyon fonksiyonu kullanılmaktadır.

$$l_j(x) = \frac{\phi(x)}{(x-x_j)\phi^{(1)}(x_j)} \rightarrow j = 1,2,\dots,N \qquad (5)$$

$$\phi(x) = \prod_{m=1}^{N}(x - x_m)\,; \quad \phi^{(1)}(x_j) = \frac{d\phi(x_j)}{dx} = \prod_{m=1,m\neq 1}^{N}(x_j - x_m) \qquad (6)$$

Denklem 4, 5 ve 6 kullanılarak hesaplanan ağırlık katsayıları, aşağıda verilen şekilde ifade edilebilecek olan bir $[A^{(r)}]$ matrisini vermektedir.

$$\left[A^{(r)}\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^r = \frac{d^r}{dx^r} = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r)} & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1N}^{(r)} \\ a_{21}^{(r)} & a_{22}^{(r)} & \dots & a_{2N}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1}^{(r)} & a_{N2}^{(r)} & \dots & a_{NN}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

İki ve daha yüksek mertebeli türevler alınırken Denklem 7'de elde edilen ağırlık katsayıları matrisi kullanılarak denklem 8'de verilen şekilde ağırlık katsayıları matrisi modifiye edilmektedir.

$$\left[A^{(r)}\right] = \left[A^{(1)}\right]\left[A^{(r-1)}\right] = \left[A^{(r-1)}\right]\left[A^{(1)}\right] \quad (8)$$

GDQM ile yapılan çalışmalarda en etkin çözüm yöntemlerinden biri de metodu iteratif olarak kullanmaktır. Bu yaklaşımda denklem 9'da algoritması verilen Newton-Raphson iterasyon metodu kullanılarak nonlineer kısmi diferansiyel denklem çözümleri elde edilmiştir. GDQM'in itretatif olarak kullanıldığı bu yönteme İteratif DQM (I-DQM) denilmektedir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (9)$$

3. Numerical Solution

I-DQM'in hassasiyetini ve sayısal çözümdeki etkinliğini test etmek amacıyla BD iki farklı problemde ele alınarak sayısal olarak çözülmüştür. Yapılan çalışma neticesinde BD'nin sayısal çözümlerinin iterasyon sayısı n=5 olduğunda rahatlıkla bulunduğu görülmüştür.

Problem 1. Bu problemde denklem 1'de verilen BD aşağıda verilen başlangıç ve sınır şartlarında ele alınmıştır [28, 29]

$$u(x,0) = \sin(\pi x),\ 0 \le x \le 1 \quad (10)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = \ t > 0 \quad (11)$$

Problemin Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik çözümü denklem 12, 13 ve 14'te verilmiştir.

$$u(x,t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2\pi^2\nu\ t) n\ sin(n\pi x)}{B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2\pi^2\nu\ t) cos(n\pi x)} \quad (12)$$

$$B_0 = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi\nu}(1-\cos(\pi x))\right) dx \quad (13)$$

$$B_n = 2\int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi\nu}(1-\cos(\pi x))\right) \cos(n\pi x) dx \quad (14)$$

Problem 1'in çözümleri kinematik viskozite değeri υ=0.1'den υ=0.0001'e kadar (Şekil 1) gerçekleştirilmiştir. Tablo 1, 2 ve 3'te υ=0.01, υ=0.005 e υ=0.003 değerleri için elde edilen

sonuçların literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırması verilmiştir. Elde sonuçlar I-DQM'in diğer yöntemlerden daha hassas ve efektif sonuç sağladığını göstermiştir.

Tablo 1 Problem 1'in kinematik viskozite υ=0.01 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

			v=0.01			
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 29 dt=0.01	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
	0.4	0.34191493	0.3419148	0.34229	0.34184	0.34191
	0.6	0.26896484	0.2689656	0.26902	0.26891	0.26896
0.25	0.8	0.22148191	0.2214817	-	0.22143	0.22148
	1.0	0.18819396	0.1881934	0.18817	0.18815	0.18820
	3.0	0.07511408	0.0751142	0.07511	0.07510	0.07511
	0.4	0.66071138	0.6607129	0.66797	0.66060	0.66069
	0.6	0.52941833	0.5294190	0.53211	0.52932	0.52942
0.50	0.8	0.43913827	0.4391384	-	0.43905	0.43914
	1.0	0.37442004	0.3744201	0.37500	0.37436	0.37443
	3.0	0.15017900	0.1501791	0.15018	0.15017	0.15019
	0.4	0.91026	0.91025	0.93680	0.91026	0.91023
	0.6	0.76724	0.76723	0.77724	0.76719	0.76723
0.75	0.8	0.64740	0.64740	-	0.64745	0.64740
	1.0	0.55604971	0.556048	0.55833	0.55608	0.55606
	3.0	0.22481125	0.224812	0.22485	0.22504	0.22486

Tablo 2 Problem 1'in kinematik viskozite υ=0.005 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

			v=0.005			
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 29 dt=0.01	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
	1	0.18878808	0.188787	0.18895	0.18874	0.18898
0.25	5	0.04696344	0.046962	0.4696	0.04695	0.04698
	10	0.02421684	0.024217	0.02422	0.02421	0.02422
	15	0.01630761	0.016305	0.01631	0.01631	0.01631
	1	0.37572330	0.375724	0.37837	0.37565	0.37608
0.50	5	0.09392008	0.093921	0.09393	0.09391	0.09396
	10	0.04842135	0.048424	0.04842	0.04842	0.04843
	15	0.03243881	0.032439	0.03244	0.03244	0.3244
	1	0.55838	0.55838	0.56695	0.55831	0.55883
0.75	5	0.14083156	0.140836	0.14086	0.14083	0.14091
	10	0.07113382	0.071134	0.07112	0.07114	0.07118
	15	0.04413288	0.044135	0.04412	0.04415	0.04416

Tablo 3 Problem 1'in kinematik viskozite υ=0.003 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

			v=0.003		
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
0.25	1	0.18901909	0.189018	0.18898	0.18902
	5	0.04698093	0.046981	0.04697	0.04698
	10	0.02422173	0.024222	0.02422	0.02422
	15	0.01631711	0.016319	0.01631	0.01631
0.50	1	0.37619	0.37616	0.37615	0.37623
	5	0.09395530	0.093957	0.09394	0.09396
	10	0.04843	0.04842	0.04843	0.04844
	15	0.03263170	0.032632	0.03263	0.03263
0.75	1	0.55924	0.55927	0.55919	0.55928
	5	0.14095	0.14094	0.14091	0.14092
	10	0.07260	0.07259	0.07261	0.07261
	15	0.04841	0.04840	0.04840	0.04839

Tablo 4 Problem 2'nin kinematik viskozite υ=0.01 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

			v=0.01			
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 29 dt=0.01	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
0.25	0.4	0.36225937	0.362258	0.36273	0.36217	0.36225
	0.6	0.28203659	0.282034	0.28212	0.28197	0.28204
	0.8	0.23045114	0.230453	-	0.23040	0.23045
	1.0	0.19469040	0.194694	0.19467	0.19645	0.19649
	3.0	0.07613409	0.076139	0.07613	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.68367905	0.683672	0.69186	0.68357	0.68364
	0.6	0.54831643	0.548312	0.55125	0.54822	0.54831
	0.8	0.45371358	0.453715	-	0.45363	0.45371
	1.0	0.38567577	0.385671	0.38627	0.38561	0.38568
	3.0	0.15217998	0.152173	0.15218	0.15217	0.15219
0.75	0.4	0.92050	0.92051	0.94940	0.92050	0.92044
	0.6	0.78299	0.78299	0.79399	0.78293	0.78297
	0.8	0.66270696	0.662703	-	0.66264	0.66272
	1.0	0.56932054	0.569321	0.57170	0.56924	0.56932
	3.0	0.22774304	0.227745	0.22778	0.22774	0.22779

Problem 2. Ele alınan ikinci problemde denklem 1'de verilen BD'i denklem 15 ve 16'da verilen başlangıç ve sınır şartlarında çözülmüştür [30,31].

$$u(x,0) = 4\mathrm{x}(1-\mathrm{x}),\ 0 \le x \le 1 \qquad (15)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = \ t > 0 \tag{16}$$

Tablo 5 Problem 2'nin kinematik viskozite υ=0.005 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

v=0.005					
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
0.25	1	0.19608088	0.196081	0.19604	0.19630
	5	0.04741466	0.047415	0.04741	0.04740
	10	0.02433609	0.024335	0.02433	0.02434
	15	0.01636181	0.016362	0.01636	0.01636
0.50	1	0.38797	0.38795	0.38795	0.388392
	5	0.09481406	0.094812	0.09481	0.094866
	10	0.04865976	0.048655	0.04866	0.048672
	15	0.03255011	0.032552	0.03255	0.032560
0.75	1	0.57250	0.57250	0.57248	0.572986
	5	0.14215418	0.142155	0.14215	0.142238
	10	0.07151705	0.071519	0.07152	0.071573
	15	0.04432822	0.044339	0.04433	0.044364

Tablo 6 Problem 2'nin kinematik viskozite υ=0.003 için sayısal sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması, h=0.01, dt=0.001

v=0.003					
x	t	Analitik Sonuç	I-DQM	Ref 19 dt= 0.001	Ref. 18 dt=0.001
0.25	1	0.19672202	0.196725	0.19668	0.19673
	5	0.04746474	0.047468	0.04746	0.04747
	10	0.02434969	0.024351	0.02434	0.02434
	15	0.01637506	0.016379	0.01637	0.01637
0.50	1	0.38924620	0.389250	0.38890	0.38898
	5	0.09491169	0.094923	0.09491	0.09491
	10	0.04869814	0.048695	0.04870	0.04869
	15	0.03274752	0.032749	0.03274	0.03275
0.75	1	0.87378	0.87376	0.57375	0.57383
	5	0.14232400	0.142326	0.14232	0.14233
	10	0.07298597	0.072982	0.07298	0.07299
	15	0.04856835	0.048565	0.04857	0.04857

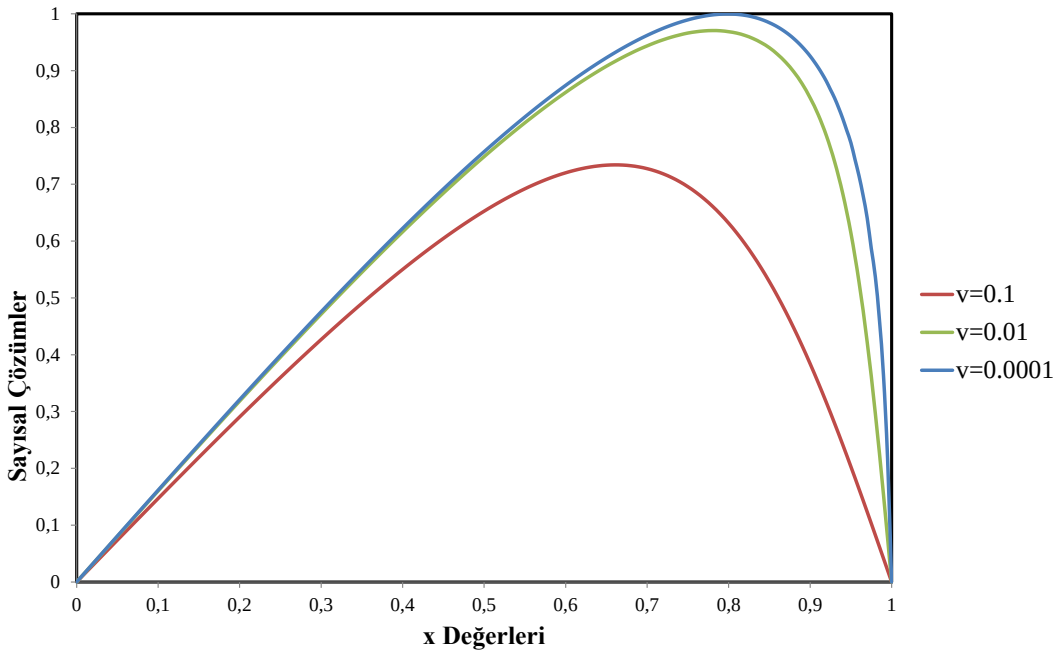
Problemin Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik çözümü denklem 17, 18 ve 19'da verilmiştir.

$$u(x,t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2\pi^2\nu\ t) n\ sin(n\pi x)}{B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2\pi^2\nu\ t) cos(n\pi x)} \tag{17}$$

$$B_0 = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{3\nu}(3x^2 - 2x^3)\right) dx \quad (18)$$

$$B_n = 2\int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{3\nu}(3x^2 - 2x^3)\right) \cos(n\pi x) dx \quad (19)$$

Literatürdeki diğer sayısal çözümlerle karşılaştırıldığında I-DQM ile yapılan çalışmada Tablo 4, 5 ve 6'dan görüldüğü gibi daha hassas çözümler elde edilmiştir. Her iki problemde de sayısal çözümler yapılırken zaman boyutunda ilerleme adımı dt=0.001 akışın fiziksel yönündeki ilerleme adımı ise h=0.01 alınmıştır. Literatürdeki diğer çalışmalara bakıldığında özellikle akışın fiziksel ilerleme yönündeki adımının h=0.01'den çok daha küçük alınarak çözüme ulaşıldığı görülmektedir. Bu durum, önerilen I-DQM metodun literatürdeki diğer çözümlerden daha hızlı bir şekilde sonuca ulaşma kabiliyetine sahip olduğunu göstermektedir [14,18,28].



Şekil 1. Problem 1'in kinematik viskozite değeri υ=0.1, υ=0.01 ve υ=0.0001 olduğundaki fiziksel davranışı, t=0.3

4. Conclusions

Bu çalışmada, İteratif DQM (I-DQM) kullanılarak BD için sayısal çözüm gerçekleştirilmiştir. Literatürdeki diğer sayısal yöntem sonuçları ve Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırıldığında I-DQM oldukça yüksek bir hassasiyeti yakaladığı görülmektedir. I-DQM'in kinematik viskozite değeri υ=0.0001'e kadar kararlı ve uygun sayısal sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Literatürdeki diğer çalışmalara bakıldığında özellikle akışın fiziksel ilerleme yönündeki adımının h=0.01'den çok daha küçük alınarak çözüme ulaşıldığı görülmektedir. Bu durum, önerilen I-DQM metodun literatürdeki diğer çözümlerden daha hızlı bir şekilde sonuca ulaşma kabiliyetine sahip olduğunu göstermektedir.

Acknowledgements

Bu çalışma 17.KARİYER.74 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından desteklenmiştir.

References

[1] H. Bateman, «Some Recent Researches on The Motion Of Fluids,» *Monthly Weather Review,* cilt 40, pp. 163-170, 1915.

[2] J. M. Burgers, «Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion,» *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.,* cilt 17, no. 2, pp. 1-53, 1939.

[3] J. M. Bugers, «A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence,» *Advances in Applied Mechanics,* cilt 1, pp. 171-199, 1948.

[4] E. Hopf, «The partial differential equation ut + uux = μxx,» *Pure and Applied Mathematics,* cilt 3, no. 3, pp. 201-230, 1950.

[5] J. D. Cole, «On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics,» *Quart. Appl. Math.,* cilt 9, pp. 225-236, 1951.

[6] J. Caldwell ve P. Smith, «Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number,» *Appl. Math. Model.,* cilt 6, pp. 381-385, 1982.

[7] D. J. Evans ve A. R. Abdullah, «The group explicit method for the solution of Burgers' equation.,» *Quart. Appl. Math.,* cilt 30, pp. 239-253, 1984.

[8] R. C. Mitta ve P. Signnal, «Numerical solution of Burgers' equation.,» *Commun. Numer. Methods Eng.,* cilt 9, pp. 397-406, 1993.

[9] T. Öziş ve A. Özdeş, «A direct variational methods applied to Burgers' equation.,» *J. Comput. Appl. Math.,* cilt 71, pp. 163-175, 1996.

[10] S. A. Kutluay, A. R. Bahadir ve A. Özdeş, «Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods.,» *J. Comput. Appl. Math.,* cilt 103, pp. 251-261, 1999.

[11] S. A. Kutluay ve A. Esen, «A linearized numerical scheme for Burgers-like equations,» *Appl. Math. Comput.,* cilt 156, pp. 295-305, 2004.

[12] I. A. Hassanien, A. A. Salama ve H. A. Hosham, «Fourth-order finite difference method for solving Burgers equation.,» *Appl. Math. Comput.,,* cilt 70, pp. 781-800, 2005.

[13] W. Liao, «An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Bugers equation.,» *Appl. Math. Comput.,* cilt 206, pp. 755-764, 2008.

[14] T. Öziş ve U. Erdoğan, «An exponentially fitted method for solving Bugers equation.,» *Int. J. Numer. Meth. Engng.,* cilt 79, pp. 696-705, 2009.

[15] R. Mittal ve R. Jiwari, «A differential quadrature method for numerical solutions of Burgers'-type equations.,» *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow,* cilt 22, no. 7, pp. 880-895, 2012.

[16] A. Gupta ve S. S. Ray, «Comparison between homotopy perturbation method and optimal homotopy asymptotic method for the soliton solutions of Boussinesq–Burger equations,»

Computers and Fluids, cilt 103, pp. 34-41, 2014.

[17] A. A. Nascimento, F. P. M. A. Silveria-Neto ve E. L. M. Padilla, «A comparison of Fourier pseudospectral method and finite volume method used to solve the Burgers equation,» *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.,* cilt 36, pp. 737-742, 2014.

[18] R. Jiwari, «A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation.,» *Computer Physics Communications,* cilt 188, pp. 59-67, 2015.

[19] R. Jiwari, «A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Bugers equation.,» *Comput. Phys. Comm.,* cilt 193, pp. 2413-2423, 2012.

[20] M. Tamsir, V. K. Srivastava ve R. Jiwar, «An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers' equation,» *Applied Mathematics and Computation,* cilt 290, pp. 111-124, 2016.

[21] R. Bellman ve J. Casti, «Differential quadrature and long-term integration.,» *J. Math. Anal. Appl.,* cilt 34, no. 2, pp. 235-238, 1971.

[22] R. Bellman, B. G. Kashef ve J. Casti, «Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations.,» *Journal of Computational Physics.,* cilt 40, no. 1, pp. 40-52, 1972.

[23] R. Bellman, B. G. Kashef, E. S. Lee ve R. Vasudevan, «Differential quadrature and splines.,» *Computers and Mathematics with Applications.,* cilt 1, no. (3-4), pp. 371-376, 1975.

[24] J. R. Quan ve C. T. Chang, «New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods - I.,» *Computational Chemical Engineering,* cilt 13, pp. 779-788, 1989.

[25] J. R. Quan ve C. T. Chang, «New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods - II,» *Computational Chemical Engineering,* cilt 13, pp. 1017-1024, 1989.

[26] C. Shu ve B. E. Richards, «High Resolution of Natural Convection in A Square Cavity by Generalized Differential Quadrature.,» %1 içinde *Proceeding of 3rd Conference on Advanced in Numerical Methods in Engineering: Theory and Application,,* Swansea, UK, 1990.

[27] C. Shu, «Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to The Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Paralel Computation.,» *PhD Dissertation. University of Glosgow, UK.,* 1991.

[28] A. Doğan, «A Galerkin finite element approach to Burgers' equation,» *Appl. Matrh. Comput. ,* cilt 157, pp. 331-346, 2004.

[29] M. Kadalbajoo ve A. Awasthi, «A numerical method based on Crank–Nicolson scheme for Burgers' equation,» *Appl. Math. Comput.,* cilt 182, pp. 1430-1442, 2006.

[30] M. Xu, R.-H. Wang, J.-H. Zhang ve Q. Fang, «A novel numerical scheme for solving Burgers' equation,» *Appl. Math. Comput.,* cilt 217, pp. 4473-4482, 2011.

[31] A. Asaithambi, «Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation,» *Appl. Math. Comput.,* cilt 216, pp. 2700-2708, 2010.